S_4 Group Analysis — Orbit Classification of Boolean Function Spaces

버전: 1.2
작성일: 2026-06-23
최종 갱신: 2026-06-23 (OC-1~OC-5 완료 — Space(NOT) 32궤도, L∩M 3궤도 신규 확인)
위치: `6BooleanFunctionSpaceTheory/theory/S4GroupAnalysis.md`
관련 TODO 항목: `TODO.md`의 「미래 연구 (FutureWorks)」 §1 (우선순위 1), `paper.md` (옛 `IntegrationMap.md §2.1`의 흡수처)
관련 문서: `paper.md` (옛 `theory/FunctionSpaceTheory.md`, `questions/OQ2_axisswap_symmetry.md`, `fq/FQ_B_kmap_geometry.md §FQ-9`가 흡수·삭제됨)
목적: Repo 3 (변수 재배열 불변성) ↔ Repo 6 (게이트 공간 이론)의 군론적 통합

---

0. 이 문서의 위치

`FutureWorks.md` §1은 S_4 군론적 분류를 **연구 우선순위 1번**으로 명시했다:

> "S_4 궤도 분류 — Repo 3·6 통합의 직접적 수학적 성과"

또한 `IntegrationMap.md §2.1`은 다음 두 작업을 **우선순위 높음**으로 표시했다:

- Space(AND)의 S_4 궤도 분류 (단조 함수 168개)
- S_4 불동점 완전 분류

이 문서는 해당 분석의 수학적 토대를 구축한다.

---

1. 수학적 프레임워크

1.1 S_4의 4변수 Boolean 함수에 대한 작용

군: S_4 = 4개 원소 {A, B, C, D}의 모든 순열의 군 (크기 24)

작용: 순열 σ ∈ S_4를 4변수 Boolean 함수 f에 적용:

$$(\sigma \cdot f)(A, B, C, D) = f(\sigma^{-1}(A), \sigma^{-1}(B), \sigma^{-1}(C), \sigma^{-1}(D))$$

또는 등가로: $(f \circ \sigma)(x) = f(\sigma(x))$

1.2 핵심 명제: Space(G)는 S_4-불변

명제 1.1: 임의의 게이트 G에 대해, Space(G)는 S_4 작용 하에 닫혀 있다.

즉, $f \in \mathrm{Space}(G)$ 이고 $\sigma \in S_4$ 이면 $f \circ \sigma \in \mathrm{Space}(G)$.

증명 스케치:
f가 G-게이트만으로 구현되는 회로를 가진다면, f∘σ는 같은 회로에서 입력 와이어를 σ에 따라 재배치한 것이다. 회로의 게이트 종류(G)는 변하지 않으므로 f∘σ ∈ Space(G). ■

결론: 각 Space(G)는 S_4 궤도들의 합집합으로 분해된다.

1.3 S_4의 켤레류(Conjugacy Classes)

Burnside의 보조정리 적용을 위해 S_4의 켤레류(= 원소 개수 동일):

켤레류 (치환 타입)	원소 수	예시
항등원	1	(A)(B)(C)(D)
호환(transposition)	6	(AB), (AC), (AD), (BC), (BD), (CD)
3-순환(3-cycle)	8	(ABC), (ABD), (ACD), (BCD), 그 역원들
4-순환(4-cycle)	6	(ABCD), (ABDC), (ACBD), 그 역원들
이중 호환	3	(AB)(CD), (AC)(BD), (AD)(BC)
합계	**24**	

1.4 Burnside의 보조정리

$$|\text{Orbits}| = \frac{1}{|S_4|} \sum_{\sigma \in S_4} |\text{Fix}(\sigma, \text{Space}(G))|$$

여기서 $\text{Fix}(\sigma, \text{Space}(G)) = \{f \in \text{Space}(G) : f \circ \sigma = f\}$.

1.5 카르노 맵의 토러스 위상과 시각적 패턴 해석 주의사항

4변수 카르노 맵은 평면이 아니라 **환면체(Torus)** 위에 놓인 구조이다:

- **상하 연결:** AB=00 행과 AB=10 행은 인접한다 (Gray 코드에서 00과 10은 한 비트 차이)
- **좌우 연결:** CD=00 열과 CD=10 열은 인접한다 (동일 이유)

> ⚠️ **중요 귀결:** 카르노 맵의 시각적 패턴을 기술할 때 "좌상단", "우하단", "모서리" 등 절대적 위치 표현은 **토러스 위상 하에서 의미가 없다.** 어떤 셀도 다른 셀보다 특별히 "끝"이나 "모서리"에 있지 않으며, 특정 패턴이 맵의 어느 위치에 나타나는지는 오직 **변수 명명·배열 순서**에만 의존한다.

잘못된 기술 (위치 의존)	올바른 기술 (토러스 불변)
"좌상단 한 칸만 흰색"	"HW=0인 유일한 셀(m0) 하나만 0"
"우하단에 집중된 패턴"	"HW≥3인 셀들만 1"
"우하단 한 칸만 채워짐"	"HW=4인 유일한 셀(m15) 하나만 1"

이 위상적 사실을 S_4 궤도 분류와 혼동하면 안 된다: **같은 S_4-궤도의 함수들은 변수 순열로 서로 옮겨지지만, 그 순열이 격자 대칭군 W(토러스 이동 포함)에 속하지 않으면 카르노 맵 그림이 토러스 회전·반사로 겹쳐지지 않을 수 있다(예: A∧B와 A∧C).** 반대로 W로 겹쳐지는 그림(예: A와 ¬A)이 같은 S_4-궤도라는 보장도 없다.

---

2. Space(XOR) = L (아핀 클론)의 완전 분석

2.1 아핀 함수의 구조

4변수 아핀 함수 (= Space(XOR)의 원소):

$$f(A,B,C,D) = a_0 \oplus a_1 A \oplus a_2 B \oplus a_3 C \oplus a_4 D, \quad a_i \in \{0,1\}$$

총 원소 수: $2^5 = 32$개 (계수 벡터 $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4) \in \{0,1\}^5$).

2.2 S_4 작용이 아핀 계수에 미치는 효과

σ = (AB)인 경우:

$$f \circ (AB)(A,B,C,D) = f(B,A,C,D) = a_0 \oplus a_1 B \oplus a_2 A \oplus a_3 C \oplus a_4 D$$

$f \circ (AB) = f$ 조건: $a_1 = a_2$ (A와 B의 계수가 같아야 함).

일반 원리: 순열 σ가 변수 x_i와 x_j를 교환하면, 불동점 조건은 $a_i = a_j$.

2.3 각 켤레류별 Fix(σ, L) 계산

원리: σ의 각 궤도(σ의 작용 하에 같은 궤도에 속하는 변수 인덱스 집합)에 대해, 해당 계수들은 같아야 한다.

켤레류	σ의 궤도 구조	자유 계수 수	Fix(σ, L)
항등원 (A)(B)(C)(D)	4개 1-궤도	a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 → 5개	$2^5 = 32$
호환 (AB)(C)(D)	{A,B} 1개 + {C} 1개 + {D} 1개	$a_0, a_1(=a_2), a_3, a_4$ → 4개	$2^4 = 16$
3-순환 (ABC)(D)	{A,B,C} 1개 + {D} 1개	$a_0, a_1(=a_2=a_3), a_4$ → 3개	$2^3 = 8$
4-순환 (ABCD)	{A,B,C,D} 1개	$a_0, a_1(=a_2=a_3=a_4)$ → 2개	$2^2 = 4$
이중 호환 (AB)(CD)	{A,B} + {C,D} → 2개 2-궤도	$a_0, a_1(=a_2), a_3(=a_4)$ → 3개	$2^3 = 8$

2.4 Burnside 적용 (Space(XOR))

$$|\mathrm{Orbits}(S_4, L)| = \frac{1}{24}(1 \times 32 + 6 \times 16 + 8 \times 8 + 6 \times 4 + 3 \times 8)$$

$$= \frac{1}{24}(32 + 96 + 64 + 24 + 24) = \frac{240}{24} = \mathbf{10}$$

Space(XOR)는 S_4 작용 하에 정확히 10개의 궤도를 가진다. ✓

2.5 10개 궤도의 완전 열거

궤도는 "XOR에 포함된 변수 개수"와 "상수 항 a_0의 값"으로 분류된다:

궤도	대표 함수	궤도 크기	의미
O_1	0	1	상수 0
O_2	1	1	상수 1
O_3	A	4	단일 변수 투영
O_4	$A \oplus 1$	4	단일 변수 투영의 보수
O_5	$A \oplus B$	6	2변수 XOR
O_6	$A \oplus B \oplus 1$	6	2변수 XOR의 보수
O_7	$A \oplus B \oplus C$	4	3변수 XOR
O_8	$A \oplus B \oplus C \oplus 1$	4	3변수 XOR의 보수
O_9	$A \oplus B \oplus C \oplus D$	1	완전 패리티 (체커보드)
O_{10}	$A \oplus B \oplus C \oplus D \oplus 1$	1	체커보드의 보수

검증: $1+1+4+4+6+6+4+4+1+1=32$ ✓

2.6 Space(XOR)의 S_4-불동점 (Fixed Points)

S_4의 **모든** 원소에 의해 고정되는 함수 = S_4 불동점.

조건: 4-순환 Fix 조건 $a_1=a_2=a_3=a_4$에서 모든 변수 계수 동일.

불동점 목록 (2개 자유 매개변수 a_0, a_1):

a_0	$a_1=a_2=a_3=a_4$	함수	의미
0	0	$f=0$	상수 0
1	0	$f=1$	상수 1
0	1	$f=A\oplus B\oplus C\oplus D$	**체커보드 (Repo 1 핵심 발견)**
1	1	$f=A\oplus B\oplus C\oplus D\oplus 1$	체커보드 보수

결론: Space(XOR)에서 S_4-불동점은 정확히 4개이며, Repo 1에서 연구의 출발점이 된 체커보드 패턴이 그 중 하나다.

2.7 Repo 1과의 연결: 체커보드의 S_4-불동점 특성

> Repo 1 (KMapStructureInvariance) §5.8의 함수 불변식과 Repo 3 정정 노트(2026-10-08, 4변수 패리티는 24개 배열 모두 같은 그림)를 이 문서가 요약한 문장 (원문 인용 아님):
> "특정 함수들이 변수 치환 하에 K-map 패턴이 불변이다."

이 불변성은 이제 군론으로 정확히 설명된다:

- O_9**의 대표원** $A\oplus B\oplus C\oplus D$: S_4의 **모든** 원소에 의해 고정 → 완전 S_4-불동점
- O_3**~**O_8 **원소들**: 일부 순열에 의해서만 고정 → 부분 대칭

체커보드가 연구의 출발점이 된 것은 SRT H3(주의 필터) + H4(의미 필터)로 설명되지만,
그 이면에는 군론적 사실이 있다: **체커보드 A⊕B⊕C⊕D는** S_4**-불동점, 즉 가장 대칭적인 함수(완전대칭 함수)이다.**
다만 이 사실이 H3·H4에 의한 선택을 설명하는지는 이 문서에서 도출하지 않았으며 열린 질문이다.

---

3. M (단조 클론, 상수 0·1 포함 168개; 레거시 이름 Space(AND) — AND·상수만으로는 17개 함수만 생성되며 M 전체에는 ∧, ∨, 0, 1이 필요하다)의 분석

> 정정 2026-10-08: 이전 제목의 "M ∩ T_0 ∩ T_1"은 상수 0, 1을 제외한 166개를 뜻하므로 본문의 168개(상수 포함)와 맞지 않아 M으로 고쳤다.

3.1 단조 함수의 구조

4변수 단조 함수의 수: **Dedekind 수 D(4) = 168**

각 단조 함수는 **최소 1(minimal ones)**의 집합 — 즉 **반사슬(antichain)** — 으로 유일하게 특성화된다.

반사슬: $\mathcal{A}\subseteq 2^{\{A,B,C,D\}}$의 부분 집합 중, 어떤 두 원소 $S,T\in\mathcal{A}$에 대해 $S\not\subseteq T$인 집합.

단조 함수 $f_{\mathcal{A}}$**:** $f_{\mathcal{A}}(x)=1$ iff $\exists S\in\mathcal{A}$ such that $S\subseteq\{i:x_i=1\}$.

3.2 Space(AND)의 S_4-불동점 (Fixed Points) — 완전 분류

S_4의 모든 원소에 의해 고정되는 단조 함수 = **완전 대칭 단조 함수 = 임계값 함수(Threshold Functions)**.

분류 원리: 임의의 σ ∈ S_4에 대해 f∘σ = f이려면, f는 입력 변수들의 **Hamming 가중치(=1의 개수)**에만 의존해야 한다.

4변수에서 Hamming 가중치별 레이어:

- 가중치 0: {0000} (1개 입력)
- 가중치 1: {A,B,C,D} (4개 입력)
- 가중치 2: {AB, AC, AD, BC, BD, CD} (6개 입력)
- 가중치 3: {ABC, ABD, ACD, BCD} (4개 입력)
- 가중치 4: {ABCD} (1개 입력)

단조 함수가 Hamming 가중치만으로 결정되려면, 1-영역은 "일정 임계값 이상의 가중치" = **위쪽으로 닫힌 (upward-closed) 부분집합**이어야 한다.

$\{0,1,2,3,4\}$의 upward-closed 부분집합 (+ empty set):

임계값	함수 표현	설명
∅ (없음)	$f = 0$	상수 0
≥ 4	$f = A \wedge B \wedge C \wedge D$	모두 1일 때만 출력 1
≥ 3	$\mathrm{Maj}_3(A,B,C,D)$	3개 이상이 1일 때 출력 1
≥ 2	$\mathrm{Maj}_2(A,B,C,D)$	2개 이상이 1일 때 출력 1
≥ 1	$f = A \vee B \vee C \vee D$	하나 이상이 1일 때 출력 1
≥ 0	$f = 1$	상수 1

결론: Space(AND)의 S_4-불동점은 정확히 6개 (임계값 함수)

이 6개는 Repo 2 (대칭 Boolean 함수)의 Layer 선택 틀로 기술되는 완전대칭 함수(총 $2^5 = 32$개) 중 단조인 함수의 정확한 목록이다.

$$\mathrm{Fix}(S_4, \mathrm{Space}(AND)) = \{0,\ A \vee B \vee C \vee D,\ \mathrm{Maj}_2,\ \mathrm{Maj}_3,\ A \wedge B \wedge C \wedge D,\ 1\}$$

3.3 Burnside 보조정리 적용 — Space(AND)

항등원의 기여는 확실하다: $\mathrm{Fix}(\mathrm{id}, M) = 168$.

나머지 켤레류별 Fix(σ, M)의 계산:

호환 (AB)에 대한 Fix:
$f \circ (AB) = f$인 단조 함수 = A와 B에 대해 대칭인 단조 함수.
이는 "A와 B를 순서 없는 쌍으로 다루는 4변수 단조 함수"의 수와 같다.

이를 구체적으로 계산하기 위해, A와 B가 대칭인 4변수 단조 함수는 $(x_A + x_B \in \{0,1,2\},\ C,\ D)$의 단조 함수, 즉 사슬곱 $[3] \times [2] \times [2]$ 위의 상향집합(up-set)과 일대일 대응한다 (3-변수 단조 함수의 수 D(3)=20이 아니라 50개).

이중 호환 (AB)(CD)에 대한 Fix:
$f(A,B,C,D) = f(B,A,D,C)$인 단조 함수.
{A,B}와 {C,D}가 각각 대칭인 단조 함수. 이는 $A \vee B, A \wedge B, C \vee D, C \wedge D$의 함수로 환원 가능.

4-순환 (ABCD)에 대한 Fix:

네 변수 A→B→C→D→A 순환 대칭이 있는 단조 함수 = 임계값 함수 6개 + 2개 추가 (Fix=8 확인됨).

켤레류	원소 수	Fix(σ, M)	상태
항등원 (A)(B)(C)(D)	1	168	✅ 확정
호환 (AB)	6	**50**	✅ 완료 (OC-1)
3-순환 (ABC)	8	**15**	✅ 완료 (OC-1)
4-순환 (ABCD)	6	**8**	✅ 완료 (OC-1)
이중 호환 (AB)(CD)	3	**28**	✅ 완료 (OC-1)

Burnside 계산 (OC-1 완료):

$$|\mathrm{Orbits}(S_4, M)| = \frac{1}{24}(1 \times 168 + 6 \times 50 + 8 \times 15 + 6 \times 8 + 3 \times 28) = \frac{720}{24} = \mathbf{30}$$

Space(AND)는 S_4 작용 하에 정확히 30개의 궤도를 가진다. ✓

> 검증: 직접 궤도 열거(Python 컴퓨터 열거)를 통해 30개 궤도 독립 확인, 크기 합 = 168 ✓

3.5 D (자기쌍대 클론; 레거시 이름 Space(NOT) — NOT·상수만으로는 0, 1, 변수와 그 부정의 10개 함수만 생성된다)의 완전 분석 — OC-4

3.5.1 자기쌍대 함수의 구조

자기쌍대(self-dual) 함수: $f(x) = \neg f(\neg x)$ for all $x \in \{0,1\}^4$.

4변수에서 입력 16개는 8쌍의 **보수 쌍(complementary pairs)** $\{n, \bar{n}\}$ (여기서 $\bar{n} = 15 - n$, 비트별 보수)으로 분류된다:

$$\{0,15\},\ \{1,14\},\ \{2,13\},\ \{3,12\},\ \{4,11\},\ \{5,10\},\ \{6,9\},\ \{7,8\}$$

각 쌍에서 정확히 하나의 원소에 출력 1을 배정해야 하므로, 자기쌍대 함수는 $2^8 = \mathbf{256}$개이다.

명제 3.5.1: Space(NOT)는 S_4 작용 하에 닫혀 있다.

증명: f가 자기쌍대이고 $\sigma \in S_4$이면,

$$(\sigma \cdot f)(\neg x) = f(\sigma(\neg x)) = f(\neg\sigma(x)) = \neg f(\sigma(x)) = \neg(\sigma \cdot f)(x) \quad \checkmark$$

■

3.5.2 켤레류별 Fix(σ, Space(NOT)) 분석

자기쌍대 함수의 S_4-고정 조건 = **σ-대칭**과 **자기쌍대** 조건의 동시 만족.

핵심 관찰 — 충돌 메커니즘: σ의 입력 궤도와 보수 쌍 $\{n, \bar{n}\}$이 **같은 궤도**를 이루면, $f(n) = f(\bar{n})$ (σ-대칭) 과 $f(n) = \neg f(\bar{n})$ (자기쌍대)가 동시에 요구되어 **해가 없다**.

켤레류별 분석:

항등원: 모든 16 입력이 독립적. 보수 쌍 8개에서 각각 1비트 자유 → Fix = $2^8 = 256$.

호환 (AB): σ 궤도 = {n : x_A≠x_B 인 쌍} + {고정점}. 보수 쌍 $\{5, 10\}$과 $\{6, 9\}$를 확인하면,
호환 (AB) 하에서 5(=0101)↔9(=1001), 6(=0110)↔10(=1010)으로 교환되므로
$\{5, 10\}$은 σ-궤도가 아님 (5→9≠10). 충돌 없음. 자유 변수 6개 → Fix = $2^6 = \mathbf{64}$.

3-순환 (ABC): σ 궤도 크기 3. 보수 쌍들이 모두 다른 σ-궤도에 걸침. 충돌 없음.
자유 변수 4개 → Fix = $2^4 = \mathbf{16}$.

4-순환 (ABCD): 궤도 $\{5, 10\}$ (크기 2) 확인:
5=(0101) → σ(5)=(1010)=10 → σ(10)=(0101)=5. 즉 $\{5, 10\}$이 σ-궤도.
그런데 $\{5, 10\}$은 보수 쌍이기도 함(15-5=10). → **충돌 → Fix = 0**.

이중 호환 (AB)(CD): 궤도 $\{5, 10\}$과 $\{6, 9\}$ 확인:
5=(0101) → σ(5)=(1010)=10 (두 쌍 모두 교환). $\{5, 10\}$과 $\{6, 9\}$ 모두 σ-궤도이며 동시에 보수 쌍 → **충돌 → Fix = 0**.

켤레류	원소 수	Fix(σ, Space(NOT))	충돌 여부
항등원	1	**256**	없음
호환 (AB)	6	**64**	없음
3-순환 (ABC)	8	**16**	없음
4-순환 (ABCD)	6	**0**	✗ $\{5, 10\}$ 충돌
이중 호환 (AB)(CD)	3	**0**	✗ $\{5, 10\}$, $\{6, 9\}$ 충돌

3.5.3 Burnside 적용 (Space(NOT))

$$|\mathrm{Orbits}(S_4, \mathrm{Space(NOT)})| = \frac{1}{24}(1 \times 256 + 6 \times 64 + 8 \times 16 + 6 \times 0 + 3 \times 0)$$

$$= \frac{1}{24}(256 + 384 + 128 + 0 + 0) = \frac{768}{24} = \mathbf{32}$$

Space(NOT)는 S_4 작용 하에 정확히 32개의 궤도를 가진다. ✓

> 검증: Python 컴퓨터 열거(`scripts/s4_orbit_calculator.py`)를 통해 32개 궤도 독립 확인, 크기 합 = 256 ✓

3.5.4 S_4-불동점 부재 — 정리

정리 3.5.2 (Space(NOT)의 S_4-불동점 = 0):
Space(NOT)에는 S_4-불동점이 존재하지 않는다.

증명:
S_4-불동점은 Hamming 가중치(HW)에만 의존해야 한다. HW=2 레이어 입력 중 보수 쌍:
$\{5, 10\}$ (5=0101, 10=1010, HW=2)와 $\{6, 9\}$ (6=0110, 9=1001, HW=2)가 모두 HW=2에 속한다.
Hamming 가중치에만 의존하면 $f(5) = f(10)$이지만, 자기쌍대 조건은 $f(5) = \neg f(10)$을 요구. 모순. ■

함의: Space(AND)의 6개 불동점(임계값 함수)이 Space(NOT) 내에 하나도 포함되지 않는다.
(임계값 함수들 중 자기쌍대인 것 = 없음 — 왜냐하면 Maj_2(0000)=0이지만 Maj_2(1111)=1, 자기쌍대 조건 $f(0) = \neg f(15)$ 즉 $0 = \neg 1$=참 ✓이지만, Maj_2(0110)=1이고 Maj_2(1001)=1이어서 $f(6) = \neg f(9)$: $1 \neq \neg 1$=거짓 ✗. 따라서 Maj_2는 자기쌍대가 아님.)

3.5.5 궤도 크기 분포

궤도 크기	궤도 수	소계	안정자 크기
4	16	64	24/4 = 6 (S_3형 부분군)
12	16	192	24/12 = 2 (호환형 부분군)
합계	**32**	**256 ✓**	

3.6 L ∩ M (아핀이면서 단조인 함수) — OC-5

3.6.1 L ∩ M의 원소

L ∩ M = 아핀(Space(XOR)) 이면서 단조(Space(AND))인 함수.

아핀 함수 $f = a_0 \oplus \bigoplus_i a_i x_i$ 가 단조이려면, 출력이 어떤 변수도 0에서 1로 바뀔 때 1에서 0으로 감소해선 안 된다. 이를 만족하는 아핀 함수는:

$$L \cap M = \{0,\ 1,\ A,\ B,\ C,\ D\}$$

즉, 상수 0, 상수 1, 그리고 4개의 단일 변수 투영함수 — 총 **6개** (Python 열거로 확인 ✓).

비-포함 예시: $A \oplus B$는 아핀이지만 비단조 ($A=1, B=0 \to 1$, $A=1, B=1 \to 0$).
$A \oplus 1$ (= ¬A)는 아핀이지만 비단조 ($A=0 \to 1 > A=1 \to 0$).

3.6.2 S_4-궤도 (3개)

궤도	원소	크기	S_4-불동점	비고
O_1	$\{0\}$	1	✓	상수 0
O_2	$\{1\}$	1	✓	상수 1
O_3	$\{A, B, C, D\}$	4	✗	S_4 타동적 작용 (단일 변수 투영)

Burnside 검증:

켤레류	원소 수	Fix(σ, L∩M)	기여
항등원	1	6	6
호환 (AB)	6	4	24
3-순환 (ABC)	8	3	24
4-순환 (ABCD)	6	2	12
이중 호환 (AB)(CD)	3	2	6

$$|\mathrm{Orbits}(S_4, L \cap M)| = \frac{72}{24} = \mathbf{3} \quad ✓$$

3.6.3 L ∩ M과 Space(AND) S_4-불동점의 관계

$$\mathrm{Fix}(S_4, L \cap M) = \{0, 1\} = \mathrm{Fix}(S_4, \mathrm{Space}(AND)) \cap L$$

Space(AND)의 6개 불동점 중 아핀인 것은 오직 상수 0과 상수 1 뿐.
→ **단조이면서 아핀이고 S_4-불동점인 함수 = 상수함수 2개만 존재.**

---

4. 두 분류의 정제(Refinement) 관계 — Repo 3 ↔ Repo 6 연결

4.1 핵심 정리 (FQ-9 공식화)

정리 4.1 (정제 관계):
Repo 3의 S_4 동치류 분류는 Repo 6의 Space(G) 분류보다 **세밀한(finer)** 분류이다.

$$\mathrm{Space}(G) = \bigsqcup_{i} O_i \quad (\mathrm{S}_4\text{-궤도들의 분리 합집합})$$

즉:

- 같은 S_4-궤도에 속하는 두 함수 → 반드시 같은 Space(G)에 속함
- 같은 Space(G)에 속하는 두 함수 → 반드시 같은 S_4-궤도에 속할 필요 없음

예시: Space(XOR)의 O_3 = {A, B, C, D}와 O_5 = {A⊕B, A⊕C, ...}는 모두 Space(XOR) 안에 있지만 서로 다른 S_4-궤도에 속한다.

4.2 정제 관계의 시각화

```
전체 65,536개 함수
└── Space(NAND) = Ω (65,536개)
    ├── Space(XOR) = L (32개)
    │   ├── O₁ = {0} (1개)
    │   ├── O₂ = {1} (1개)
    │   ├── O₃ = {A,B,C,D} (4개)
    │   ├── O₄ = {A⊕1,...} (4개)
    │   ├── O₅ = {A⊕B,...} (6개)
    │   ├── O₆ = {A⊕B⊕1,...} (6개)
    │   ├── O₇ = {A⊕B⊕C,...} (4개)
    │   ├── O₈ = {A⊕B⊕C⊕1,...} (4개)
    │   ├── O₉ = {A⊕B⊕C⊕D} (1개) ← Repo 1 출발점
    │   └── O₁₀ = {¬(A⊕B⊕C⊕D)} (1개)
    ├── Space(AND) = M (168개)
    │   ├── 임계값 함수 6개 (S₄-불동점 = 크기 1인 궤도 6개)
    │   └── 나머지 162개 → 30개 궤도 총 (OC-2에 완전 목록)
    └── Space(NOT) = D (256개)
        ├── 크기 4 궤도 16개 (64개 함수)
        └── 크기 12 궤도 16개 (192개 함수)
        ※ S₄-불동점 없음 (정리 3.5.2)

    L ∩ M = {0, 1, A, B, C, D} (6개) → 3궤도 (OC-5)
```

4.3 Repo 3 분류와의 대응

Repo 3에서 연구된 "변수 재배열 불변 함수들"은 두 종류로 나뉜다:

유형 1: S_4-불동점

- Space(XOR)의 불동점: {0, 1, A⊕B⊕C⊕D, ¬(A⊕B⊕C⊕D)}
- Space(AND)의 불동점: {0, 1, A∨B∨C∨D, Maj_2, Maj_3, A∧B∧C∧D}
- Space(NOT)의 불동점: **없음** (정리 3.5.2)

유형 2: S_4 궤도 내 특정 함수
Repo 3에서 "불변 구조"로 등장하는 함수들의 S_4-궤도 대응은 §5 OC-3에 완전히 정리되었다.
핵심: XOR 체커보드 → Space(XOR) O_9, 임계값 함수 6개 → Space(AND) O01~O06.

---

5. 미해결 과제 (Open Computations)

OC-1: Space(AND)의 Burnside 계산 완성 ✅ 완료

계산 방법: Python으로 168개 단조 함수 완전 열거 후 각 켤레류 대표원 적용.

결과:

켤레류	원소 수	Fix(σ, M)
항등원	1	168
호환 (AB)	6	**50**
3-순환 (ABC)	8	**15**
4-순환 (ABCD)	6	**8**
이중 호환 (AB)(CD)	3	**28**

$$|\text{Orbits}| = \frac{720}{24} = \mathbf{30}$$

> **4-순환 Fix = 8**: 임계값 함수 6개 + α. 순환 대칭 단조 함수가 정확히 8개임을 확인.
> 추가 2개는: (A∧C)∨(B∧D) (O07의 원소)와 (A∨C)∧(B∨D) = AB∨BC∨CD∨DA (O08의 원소).

OC-2: Space(AND)의 S_4-궤도 완전 목록 ✅ 완료

총 궤도 수: 30개 (컴퓨터 열거 + Burnside 양쪽 검증)

궤도	크기	대표 함수	HW 범위	비고
O01	1	0	—	S_4-불동점, 임계값 함수
O02	1	$A \wedge B \wedge C \wedge D$	{4}	S_4-불동점, Threshold-4
O03	1	Maj_3 (at-least-3)	{3,4}	S_4-불동점, Threshold-3
O04	1	Maj_2 (at-least-2)	{2,3,4}	S_4-불동점, Threshold-2
O05	1	$A \vee B \vee C \vee D$	{1,2,3,4}	S_4-불동점, Threshold-1
O06	1	1	{0,1,2,3,4}	S_4-불동점, 임계값 함수
O07	3	$(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$	{2,3,4}	"쌍 AND-OR" (3가지 변수 쌍)
O08	3	$(A \vee B) \wedge (C \vee D)$	{2,3,4}	"쌍 OR-AND" (3가지 변수 쌍)
O09	4	$B \wedge C \wedge D$	{3,4}	3-AND (4가지 변수 선택)
O10	4	$B \wedge C \wedge D \vee A \wedge C \wedge D \vee A \wedge B \wedge D$	{3,4}	3개 중 3-AND의 합
O11	4	$C \wedge D \vee B \wedge D \vee A \wedge D$	{2,3,4}	"한 변수 고정 OR"
O12	4	D	{1,2,3,4}	단일 변수 투영
O13	4	$C \wedge D \vee B \wedge D \vee B \wedge C$	{2,3,4}	"3쌍 AND" 변형
O14	4	$C \wedge D \vee B \wedge D \vee A \wedge D \vee A \wedge B \wedge C$	{2,3,4}	
O15	4	$D \vee A \wedge B \wedge C$	{1,2,3,4}	
O16	4	$D \vee B \wedge C \vee A \wedge C \vee A \wedge B$	{1,2,3,4}	
O17	4	$D \vee C \vee B$	{1,2,3,4}	3-OR
O18	6	$B \wedge C \wedge D \vee A \wedge C \wedge D$	{3,4}	
O19	6	$C \wedge D$	{2,3,4}	2-AND

궤도	크기	대표 함수	HW 범위	비고
O20	6	$C \wedge D \vee A \wedge B \wedge D \vee A \wedge B \wedge C$	{2,3,4}	
O21	6	$C \wedge D \vee B \wedge D \vee B \wedge C \vee A \wedge D \vee A \wedge C$	{2,3,4}	
O22	6	$D \vee C$	{1,2,3,4}	2-OR
O23	6	$D \vee C \vee A \wedge B$	{1,2,3,4}	
O24	12	$C \wedge D \vee A \wedge B \wedge D$	{2,3,4}	
O25	12	$C \wedge D \vee B \wedge D$	{2,3,4}	$A \wedge (B \vee C)$ 류
O26	12	$C \wedge D \vee B \wedge D \vee A \wedge B \wedge C$	{2,3,4}	
O27	12	$C \wedge D \vee B \wedge C \vee A \wedge D$	{2,3,4}	
O28	12	$C \wedge D \vee B \wedge D \vee B \wedge C \vee A \wedge D$	{2,3,4}	
O29	12	$D \vee B \wedge C$	{1,2,3,4}	$(A \wedge B) \vee C$ 류
O30	12	$D \vee B \wedge C \vee A \wedge C$	{1,2,3,4}	

크기 분포:

궤도 크기	궤도 수	소계
1	6	6
3	2	6
4	9	36
6	6	36
12	7	84
합계	**30**	**168 ✓**

OC-3: Repo 3의 "불변 구조"와 S_4-궤도의 대응 확인 ✅ 완료

결과: Repo 3 핵심 함수 → S_4-궤도 대응표

함수	단조 여부	S_4-불동점	궤도	궤도 크기
상수 0	✓	✓	Space(AND) O01	1
A∧B∧C∧D	✓	✓	Space(AND) O02	1
Maj_3 (at-least-3)	✓	✓	Space(AND) O03	1
Maj_2 (at-least-2)	✓	✓	Space(AND) O04	1
A∨B∨C∨D	✓	✓	Space(AND) O05	1
상수 1	✓	✓	Space(AND) O06	1
A∧B (2-AND)	✓	✗	Space(AND) O19	6
A∧B∧C (3-AND)	✓	✗	Space(AND) O09	4
A∨B (2-OR)	✓	✗	Space(AND) O22	6
A∨B∨C (3-OR)	✓	✗	Space(AND) O17	4
A (단일 투영)	✓	✗	Space(AND) O12	4
(A∧B)∨(C∧D)	✓	✗	Space(AND) O07	3
(A∨B)∧(C∨D)	✓	✗	Space(AND) O08	3
A∧(B∨C)	✓	✗	Space(AND) O25	12

함수	단조 여부	S_4-불동점	궤도	궤도 크기
(A∧B)∨C	✓	✗	Space(AND) O29	12
XOR A⊕B⊕C⊕D	✗ (비단조)	✓	Space(XOR) O_9	1
Exactly-1	✗ (비단조)	✓	Space(AND) 밖	1
Exactly-2	✗ (비단조)	✓	Space(AND) 밖	1
Exactly-3	✗ (비단조)	✓	Space(AND) 밖	1

핵심 발견:

1. **Repo 3의 "완전 불변 구조"** = S_4-불동점 = 해당 함수의 카르노맵 패턴이 24가지 변수 배열 모두에서 동일.
   Space(AND) 내 S_4-불동점은 정확히 6개의 임계값(Threshold) 함수 — Repo 2의 핵심 대상.
2. **체커보드 (A⊕B⊕C⊕D)**: Space(AND) 밖 (비단조), Space(XOR)의 S_4-불동점.
   Repo 1·3에서 "어떤 배열에서도 체커보드"인 이유가 군론적으로 설명됨. (§2.7 참조)
3. **Exactly-k (k=0..3) 함수들**: S_4-불동점이지만 단조 함수가 아니므로 Space(AND) 밖 (Exactly-4 = A∧B∧C∧D는 단조이며 O02).
   이들은 Repo 2가 다루는 완전대칭 함수의 부분집합이나, Space(AND)의 S_4-궤도 구조와는 직접 연결되지 않음.

Theorem 4.1 (정제 관계) 구체적 예시 4개 (OC-3 연동):

예시	함수 1	궤도 1	함수 2	궤도 2	같은 Space?	다른 궤도?
1	A∧B	O19 (크기6)	A∧B∧C	O09 (크기4)	✓ AND	✓
2	A∨B	O22 (크기6)	A∨B∨C	O17 (크기4)	✓ AND	✓
3	(A∧B)∨(C∧D)	O07 (크기3)	A∧B	O19 (크기6)	✓ AND	✓
4	Maj_2	O04 (크기1)	A∧B	O19 (크기6)	✓ AND	✓

→ 정제 관계 Theorem 4.1 성립: 동일 Space(AND) 안에서도 S_4-궤도가 다를 수 있음 ✓

OC-4: Space(NOT)의 S_4-궤도 분류 ✅ 완료 (2026-06-23)

분석 방법: Burnside 보조정리 (이론적 계산, §3.5) + Python 컴퓨터 열거 독립 검증.

결과:

켤레류	원소 수	Fix(σ, Space(NOT))
항등원	1	256
호환 (AB)	6	**64**
3-순환 (ABC)	8	**16**
4-순환 (ABCD)	6	**0**
이중 호환 (AB)(CD)	3	**0**

$$|\text{Orbits}| = \frac{768}{24} = \mathbf{32}$$

> **궤도 크기 분포**: 크기 4 궤도 16개 + 크기 12 궤도 16개 = 총 256개 함수.
> **S_4-불동점: 0개** — HW=2 레이어의 $\{5,10\}$, $\{6,9\}$ 보수 쌍이 원인. (정리 3.5.2)
> **4-순환, 이중호환 Fix = 0**: Space(AND)와의 대비 — Space(AND)는 4-순환 Fix=8, 이중호환 Fix=28.

Space(NOT)과 Space(AND) Fix 비교:

켤레류	Space(AND) Fix	Space(NOT) Fix	비교
항등원	168	256	Space(NOT) 더 큼
호환	50	64	Space(NOT) 더 큼
3-순환	15	16	거의 동일
4-순환	8	**0**	Space(NOT)만 0
이중호환	28	**0**	Space(NOT)만 0

OC-5: L ∩ M S_4-궤도 확인 ✅ 완료 (2026-06-23)

분석 방법: 직접 열거 + Burnside 검증.
상세 내용: §3.6

결과: L ∩ M = $\{0, 1, A, B, C, D\}$ — 6개 함수, **3개 궤도**.

궤도	크기	원소	S_4-불동점 여부
O_1	1	$\{0\}$	✓
O_2	1	$\{1\}$	✓
O_3	4	$\{A, B, C, D\}$	✗

$$|\text{Orbits}| = \frac{72}{24} = \mathbf{3}$$

> S_4-불동점 (상수 함수 2개)은 Space(AND) 6개 불동점 중 L에 포함되는 것들.
> 단조이면서 아핀인 불동점 = 오직 상수 함수 2개.

---

6. SRT (H8-H9)와의 연결

6.1 S_4 불동점과 H8 (Concept-as-Lens)

H8: 개념이 관찰 렌즈로 작동한다 — 개념을 획득하면 구조로 인식할 수 있는 구성이 확장된다.

S_4 불동점의 SRT적 의미:
S_4-불동점 함수들 = "어떤 변수 이름을 사용해도 동일하게 인식되는" 함수들. 이 함수들이 연구의 출발점이 된다는 것은 H3(주의 필터)가 열어 둔 질문(무엇이 필터를 통과시키는가)에 대한 하나의 가설과 부합한다: "가장 대칭적인 구조"가 주의를 먼저 끌 수 있다.

체커보드 (O_9의 원소 = Space(XOR)의 S_4-불동점)는 이 원리의 대표적 실사례이다.

Space(NOT) 연결: Space(NOT)에 S_4-불동점이 없다는 사실은, "자기쌍대이면서 완전히 대칭적인" 함수는 존재하지 않음을 의미한다. 이는 H8의 관점에서 "자기쌍대" 개념이 "완전 대칭성" 개념과 긴장 관계에 있음을 암시한다.

6.2 궤도 구조와 H9 (Concept Evolution)

H9: 연구가 개념을 생성하고, 개념이 새로운 탐구 주기를 가능하게 한다.

Repo 1의 체커보드 발견 → "S_4 대칭", "Space(XOR)" 개념 형성 → Repo 6에서 전체 10개 궤도 분류 가능 → 새로운 질문 (Space(AND)의 궤도 구조는 어떠한가?) 생성 → 30개 궤도 분류 → 새로운 질문 (Space(NOT)는?) → 32개 궤도, 불동점 부재 발견.

이 개념 발전 경로가 H9의 실사례이다.

---

7. 연구 프로그램 연계 요약

저장소	이 분석과의 연결
Repo 1 (KMapStructureInvariance)	체커보드 = O_9, Space(XOR)의 S_4-불동점 중 하나
Repo 2 (SymmetricBooleanFunction)	Maj_2, Maj_3 = Space(AND)의 S_4-불동점
Repo 3 (VariableRearrangement)	S_4-궤도 분류 = Repo 6 분류의 세밀한 버전 (FQ-9); 완전 대응표는 §5 OC-3
Repo 4 (SRT)	H3 주의 필터 = S_4-불동점 함수에 먼저 주의 집중; H8-H9의 실사례; Space(NOT) 불동점 부재가 H8에 새 함의
Repo 6 (이 저장소)	Space(G)의 S_4-궤도 구조 = Burnside 표로 재계산·완전 열거한 결과 (Space(AND) 30궤도는 알려진 값(OEIS A003182), Space(NOT) 32궤도는 이 문서에서 문헌 대조를 수행하지 않음)

---

8. 버전 이력

버전	날짜	변경 사항
1.0	2026-06-23	최초 작성 — Space(XOR)의 완전 분석 (10궤도, Burnside 검증), Space(AND) 불동점 6개, 프레임워크 설정, 미해결 과제 명시
1.1	2026-06-23	OC-1 완료: Fix(σ,M) 전체 계산 (호환=50, 3-순환=15, 4-순환=8, 이중호환=28), Burnside합=720, 궤도수=30 확정. OC-2 완료: Space(AND)의 S_4-궤도 30개 완전 목록 (크기1×6, 크기3×2, 크기4×9, 크기6×6, 크기12×7). OC-3 완료: Repo 3 핵심 함수들의 S_4-궤도 대응 확인, Theorem 4.1 구체적 예시 4개 제시.
1.2	2026-06-23	OC-4 완료: Space(NOT) 32궤도 분류 (Burnside: 768/24=32, 크기4×16+크기12×16), 켤레류별 Fix 계산 완료 (항등원=256, 호환=64, 3-순환=16, 4-순환=0, 이중호환=0), S_4-불동점 부재 증명 (정리 3.5.2). OC-5 완료: L∩M={0,1,A,B,C,D} 6개 함수의 3궤도 확인 (Burnside: 72/24=3). §3.5, §3.6 신규 절 추가. §4.2 계층도 업데이트. Python 스크립트 `scripts/s4_orbit_calculator.py` 작성 및 전 결과 독립 검증 완료.

이 문서는 FutureWorks.md §1 (S_4 군론적 분류, 우선순위 1)의 핵심 수학적 성과 문서이다.
OC-1~OC-5 완료 (2026-06-23). Space(XOR) 10궤도, Space(AND) 30궤도, Space(NOT) 32궤도, L∩M 3궤도 완전 분류 완성.
다음 단계: n=5 확장 결과 정리(기초 스캐폴드와 S_5 열거는 `scripts/s4_orbit_calculator.py`에 이미 완료, 2026-06-27: Space(XOR) 12궤도, Space(AND) 210궤도), 또는 결과를 SRT 논문(Paper 4)에 H3·H8 근거로 통합.