카르노맵 패턴의 변수 재배열 기반 해석: 구조적 불변성 연구

Variable-Rearrangement-Based Interpretation of Karnaugh Map Patterns

저자: 최종훈
연구자 정보: 인하공업전문대학 2학년 재학 · 독립 연구자

---

1. 서론

1.1 연구 배경

카르노맵(Karnaugh Map)은 디지털 논리회로 설계에서 불 대수식을 간소화하기 위한 대표적인 도구로 널리 활용되어 왔다. 전통적인 카르노맵 연구와 교육은 주로 최소항(minterm)의 배치와 인접성(adjacency)을 이용하여 논리식을 최소화하는 방법에 초점을 맞추고 있다. 이러한 접근은 논리회로 설계 측면에서 매우 유용하지만, 카르노맵이 나타내는 시각적 구조와 패턴 자체에 대한 연구는 상대적으로 제한적으로 이루어져 왔다.

최근에는 카르노맵을 단순한 계산 도구가 아닌 시각적 구조 표현 도구로 바라보려는 시도가 이루어지고 있다. 특히 특정 불 함수들이 점(point), 모서리(corner), 고리(ring), 체커보드(checkerboard) 등의 특징적인 시각 패턴을 형성한다는 점이 관찰되었으며, 이러한 패턴은 함수의 구조적 특성과 밀접한 관련을 가질 가능성이 제기되고 있다.

한편 동일한 논리함수라도 변수의 배치 순서를 변경하면 카르노맵 상의 시각 패턴이 달라지는 현상이 나타난다. 일부 패턴은 회전되거나 반사된 형태로 나타나며, 어떤 경우에는 전혀 다른 형태로 보이기도 한다. 이러한 현상은 카르노맵의 시각적 구조가 변수 배치와 어떤 관계를 가지는지에 대한 새로운 연구 질문을 제시한다.

1.2 연구 문제

변수 재배열(variable rearrangement)은 카르노맵의 시각적 표현을 변화시키지만, 모든 구조적 특성이 함께 변화하는 것은 아닐 수 있다. 겉보기 형태는 달라지더라도 특정 구조적 관계나 패턴의 본질적 특징은 유지될 가능성이 존재한다.

본 연구는 다음과 같은 질문에서 출발한다.

- 변수 재배열에 따라 카르노맵의 시각 패턴은 어떻게 변화하는가?
- 변화하는 요소와 유지되는 요소는 무엇인가?
- 변수 재배열 과정에서 관찰되는 구조적 불변성(structural invariance)은 무엇인가?
- 변수 재배열은 숨겨진 패턴을 발견하기 위한 분석 도구로 활용될 수 있는가?

1.3 연구 목적

본 연구의 목적은 카르노맵에서 변수 재배열이 시각 패턴에 미치는 영향을 분석하고, 그 과정에서 유지되는 구조적 특성을 탐색하는 데 있다.

이를 위해 다양한 변수 배열을 적용하여 패턴 변환 과정을 관찰하고, 변화하는 요소와 불변 요소를 구분하여 분석한다. 또한 이러한 분석을 바탕으로 카르노맵 패턴을 보다 구조적으로 해석할 수 있는 관점을 제안하고자 한다.

1.4 연구 기여

본 연구의 기여는 다음과 같다.

1. 카르노맵을 논리식 최소화 도구를 넘어 시각적 구조 분석 대상으로 확장한다.

2. 변수 재배열에 따른 패턴 변화 현상을 체계적으로 분석한다.
3. 구조적 불변성이라는 관점에서 카르노맵 패턴을 해석하는 틀을 제안한다.
4. 변수 재배열을 숨겨진 패턴 탐색을 위한 분석 도구로 활용할 가능성을 제시한다.

본 논문은 먼저 카르노맵과 변수 재배열에 관한 이론적 배경을 설명한 후, 변수 재배열에 따른 패턴 변화 사례를 분석한다. 이어서 구조적 불변성을 중심으로 결과를 해석하고, 이를 바탕으로 카르노맵 패턴 해석 방법과 향후 연구 방향을 논의한다.

---

2. 이론적 배경

2.1 카르노맵

카르노맵(Karnaugh Map)은 불 함수(Boolean Function)를 시각적으로 표현하여 논리식의 최소화를 수행하기 위한 도구이다. 일반적으로 4변수 카르노맵은 16개의 셀로 구성되며, 각 셀은 하나의 최소항(minterm)에 대응된다.

카르노맵의 가장 큰 특징은 인접한 셀 간에 단 하나의 변수만 변화하도록 배치된다는 점이다. 이를 통해 인접한 항들을 묶어 간단한 논리식으로 변환할 수 있다.

전통적인 카르노맵 활용은 논리식 최소화에 집중되어 왔지만, 카르노맵은 동시에 불 함수의 구조를 시각적으로 표현하는 역할도 수행한다. 특정 함수들은 반복 구조, 대칭 구조, 체커보드 구조 등 특징적인 시각 패턴을 형성하며, 이러한 패턴은 함수의 내부 구조와 관련될 가능성이 있다.

2.2 변수 배열과 Gray Code

카르노맵의 행과 열은 일반적으로 Gray Code 순서를 사용하여 배치된다.

4변수 카르노맵의 경우 대표적으로 다음과 같은 배열이 사용된다.

AB\CD	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

그림 01: 표준 4변수 카르노맵 구조와 Gray Code 배열. 행: AB=00,01,11,10 / 열: CD=00,01,11,10 으로 구성된 4×4 격자. 각 셀에는 최소항 번호(m0~m15)와 셀값(0 또는 1)을 함께 표기.

Gray Code를 사용하는 이유는 인접한 셀 사이에서 한 번에 하나의 변수만 변경되도록 하기 위함이다.

그러나 변수의 배치 순서는 반드시 하나로 고정되는 것은 아니다. 변수 A, B, C, D의 순서를 변경하면 서로 다른 카르노맵 표현을 얻을 수 있으며, 이는 동일한 함수에 대해서도 다양한 시각 패턴을 생성할 수 있다.

2.3 변수 재배열

본 연구에서 변수 재배열(variable rearrangement)은 카르노맵에 사용되는 변수들의 배치 순서를 변경하는 과정을 의미한다.

예를 들어 변수 배열이 `AB / CD`인 경우를 기준으로 할 때, 다음과 같은 다양한 형태의 배열이 가능하다.

- `AC / BD`
- `AD / BC`
- `BC / AD`

동치류 i	동치류 ii	동치류 iii
AB/CD	AC/BD	AD/BC
BA/CD	CA/BD	DA/BC
AB/DC	AC/DB	AD/CB
BA/DC	CA/DB	DA/CB
CD/AB	BD/AC	BC/AD
DC/AB	DB/AC	CB/AD
CD/BA	BD/CA	BC/DA
DC/BA	DB/CA	CB/DA

그림 02: 대표 변수 배열 3종 비교 — 24개 변수 배열을 3개의 동치류 i(AB/CD), ii(AC/BD), iii(AD/BC)로 묶은 표(동치류마다 8개 배열).

4개의 변수에 대해 가능한 순열은 총 4! = 24개이며, 각 순열은 동일한 논리함수를 서로 다른 방식으로 시각화한다.

중요한 점은 변수 재배열이 논리함수 자체를 변경하는 것이 아니라는 것이다. 함수의 진리값은 그대로 유지되며, 변화하는 것은 카르노맵 상의 표현 방식이다.

따라서 변수 재배열은 하나의 함수를 여러 관점에서 관찰하기 위한 시각적 변환 과정으로 볼 수 있다.

CD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

CD

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

BD

AC \ BD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

BD

AC \ BD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

BC

AD \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

BC

AD \ BC	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	1	0	1	0

그림 03: 변수 재배열 개념도 — 동일 XOR 함수에 대해 AB/CD → AC/BD → AD/BC 변환 흐름. 화살표로 배열 순서 연결, 함수값(진리표)은 동일하되 카르노맵 모양만 변화함을 표현.

2.4 구조적 불변성

수학과 과학의 다양한 분야에서는 변환이 이루어지더라도 유지되는 성질을 불변성(invariance)이라고 부른다.

예를 들어 도형을 회전하거나 평행이동하더라도 넓이나 둘레는 유지될 수 있으며, 이러한 성질은 해당 도형의 불변 특성으로 간주된다.

본 연구에서는 변수 재배열 이후에도 유지되는 카르노맵의 구조적 특성을 **구조적 불변성(structural invariance)**이라 정의한다.

예상되는 불변 요소의 예시는 다음과 같다.

- 1이 포함된 셀의 개수
- 함수의 논리적 의미
- 특정 패턴의 반복 구조
- 대칭 관계
- 셀 간 연결 구조

반면 다음과 같은 요소는 변화할 수 있다.

- 패턴의 위치
- 패턴의 방향
- 대칭축의 형태
- 시각적 배치

본 연구는 변수 재배열 전후의 패턴을 비교하여 어떤 특성이 변화하고 어떤 특성이 유지되는지를 분석하고자 한다.

---

3. 연구 방법

3.1 연구 절차

본 연구는 변수 재배열에 따른 카르노맵 패턴 변화를 관찰하고, 그 과정에서 나타나는 구조적 불변성을 분석하기 위해 수행되었다.

연구는 다음과 같은 절차로 진행하였다.

1. 분석 대상 함수 선정
2. 변수 배열 생성
3. 카르노맵 작성
4. 시각 패턴 관찰
5. 패턴 변화 분석
6. 불변 요소 추출
7. 구조적 불변성 해석

먼저 특징적인 시각 패턴을 형성하는 함수들을 선정한 후, 동일한 함수에 대해 다양한 변수 배열을 적용하였다. 이후 생성된 카르노맵들을 비교하여 패턴이 어떻게 변화하는지 관찰하고, 변화 과정에서도 유지되는 구조적 특성을 탐색하였다.

3.2 변수 배열 생성 방법

본 연구는 4변수 카르노맵을 대상으로 수행하였다.

4개의 변수 A, B, C, D에 대해 가능한 순열의 수는 다음과 같다.

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

따라서 총 24개의 변수 배열이 존재한다.

예를 들면 다음과 같은 배열들이 가능하다.

번호	변수 배열
1	AB / CD
2	AC / BD
3	AD / BC
4	BC / AD
...	...
24	기타 순열

각 배열은 동일한 논리함수를 서로 다른 방식으로 표현한다.

본 연구에서는 가능한 변수 배열들을 적용하여 동일 함수가 어떻게 다른 시각 패턴으로 나타나는지를 비교하였다.

3.3 분석 대상 함수

4변수 불 함수는 65,536개이므로 전수 계산은 가능하나(4.1절 정정 참조) 모든 함수의 그림을 눈으로 비교하기는 어렵기 때문에, 본 연구에서는 시각적으로 특징적인 패턴을 생성하는 함수들을 중심으로 분석을 수행하였다.

대표적인 예시는 다음과 같다.

- **체커보드 패턴**: XOR, XNOR
- **대칭 패턴**: 완전대칭함수(Symmetric Functions), Exactly-k 함수
- **블록 패턴**: 특정 변수 조합에 의해 생성되는 함수
- **대각선 패턴**: 변수 간 관계가 강조되는 함수

이러한 함수들은 시각적 특징이 명확하여 패턴 식별에는 적합하지만, 완전대칭함수(XOR, XNOR, Exactly-k)는 변수 재배열로 그림이 변하지 않으므로 재배열 효과의 관찰에는 적합하지 않다(4.1절 정정 참조).

3.4 패턴 관찰 방법

본 연구에서는 카르노맵을 단순한 논리 최소화 도구가 아닌 시각적 구조 표현으로 해석하였다.

관찰 과정에서는 다음 요소를 중심으로 분석하였다.

- 패턴의 전체 형태
- 반복 구조
- 대칭 구조
- 연결 관계
- 위치 변화
- 방향 변화

특히 개별 셀보다는 전체 구조가 어떻게 보이는지에 중점을 두었다.

이는 사람이 카르노맵을 해석할 때 개별 셀을 하나씩 읽기보다 전체 패턴을 먼저 인식할 가능성이 있다는 관찰에 기반한다.

3.5 비교 기준

변수 재배열 전후의 카르노맵은 다음 기준에 따라 비교하였다.

비교 항목	분석 내용
셀 개수	1이 존재하는 셀 수
패턴 형태	점, 선, 블록, 체커보드 등
대칭성	대칭 구조 유지 여부
연결성	인접 관계 유지 여부
위치	패턴의 위치 변화
방향	회전 및 반사 여부

이를 통해 변화하는 요소와 유지되는 요소를 구분하였다.

3.6 연구의 분석 관점

본 연구는 변수 재배열을 단순한 표현 변화로 보지 않는다.

오히려 변수 재배열을 하나의 **"구조 탐색 도구"**로 해석한다.

동일한 함수를 여러 변수 배열에서 관찰함으로써 특정 패턴이 우연히 발생한 것인지, 혹은 함수 내부의 구조적 특성에서 비롯된 것인지를 확인할 수 있기 때문이다.

따라서 본 연구는 변수 재배열을 이용하여 카르노맵의 구조를 다각적으로 관찰하고, 그 과정에서 나타나는 구조적 불변성을 분석하는 것을 목표로 한다.

---

4. 변수 재배열에 따른 패턴 변화 분석

4.1 체커보드 패턴

체커보드 패턴(checkerboard pattern)은 카르노맵에서 가장 쉽게 식별되는 시각 패턴 중 하나이다. 대표적으로 XOR 함수와 XNOR 함수는 1과 0이 교차 배치되는 체커보드 형태를 형성한다.

변수 재배열을 적용하더라도 체커보드 특유의 반복 구조는 사라지지 않는다. 4변수 XOR/XNOR는 완전 대칭 함수이므로 Gray 축 순서에서는 24개 변수 배열 모두 같은 체커보드로 나타나며, 방향이나 배치가 달라 보이는 것은 축 라벨 순서(Gray/이진)가 바뀔 때이다.

예를 들어 Gray 축 순서에서는 수직 및 수평 방향으로 교차하는 체커보드로, 이진 축 순서(00, 01, 10, 11)에서는 이중 대각선 구조로 보일 수 있다. 이는 변수 배열이 아니라 축 라벨 순서의 차이이다.

이러한 현상은 체커보드 패턴의 시각적 표현은 변화하더라도 그 기저에 존재하는 XOR 관계 자체는 유지됨을 시사한다.

따라서 체커보드 패턴은 변수 재배열에 의해 변형될 수 있지만 완전히 소멸되지는 않는 대표적 사례로 볼 수 있다.

> **정정 (2026-10-08).** 위 서술은 함수에 따라 구분해서 읽어야 한다.

- 4변수 패리티 $A \oplus B \oplus C \oplus D$ (XOR/XNOR)는 완전 대칭 함수이므로, Gray 축 순서의 카르노맵에서 **24개 변수 배열 모두 같은 체커보드 그림**이 된다 (65,536개 함수 전수 계산으로 확인). 변수 재배열로 방향이나 모양이 바뀌지 않는다.
- 배열에 따라 그림이 달라지는 것은 2변수 XOR($A \oplus B$ 등)처럼 대칭이 아닌 함수이다. 그림 18-2의 두 그림은 줄무늬와 2×2 블록 형태로, 4변수 패리티의 그림이 아니다.
- 그림 05는 축 라벨이 `00, 01, 10, 11` (비 Gray 순서)이다. 이 그림의 모양 변화는 변수 재배열이 아니라 **축 라벨 순서**의 변화에서 온 것이다 (2의 "0132 대 0123 배열" 참조).
- 3.3절의 분석 대상 중 완전대칭함수(Exactly-k, XOR, XNOR)는 변수 재배열로 그림이 변하지 않으므로, 재배열 효과를 관찰하는 대상으로는 적합하지 않다.

	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	0	1	0
11	0	1	0	1
10	1	0	1	0

그림 04: 기본 배열(AB/CD)에서의 XOR 체커보드 패턴. 1과 0이 수평·수직 방향으로 교차 배치된 4×4 격자.

	00	01	10	11
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
10	0	1	1	0
11	1	0	0	1

그림 05: 이진 축 순서(00, 01, 10, 11)로 그린 4변수 XNOR 패턴. 그림 07(Gray 축 순서)과 모양이 다른 것은 변수 재배열이 아니라 축 라벨 순서 때문이다.

	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	0	1	0	1

	00	01	10	11
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
10	1	0	0	1
11	0	1	1	0

그림 07: Gray 축 순서로 그린 XNOR 체커보드 패턴(그림 07)과 이진 축 순서로 그린 XOR 패턴(그림 07-1). 두 함수는 서로 보수 관계이며, 모양의 차이는 축 라벨 순서에서 온다.

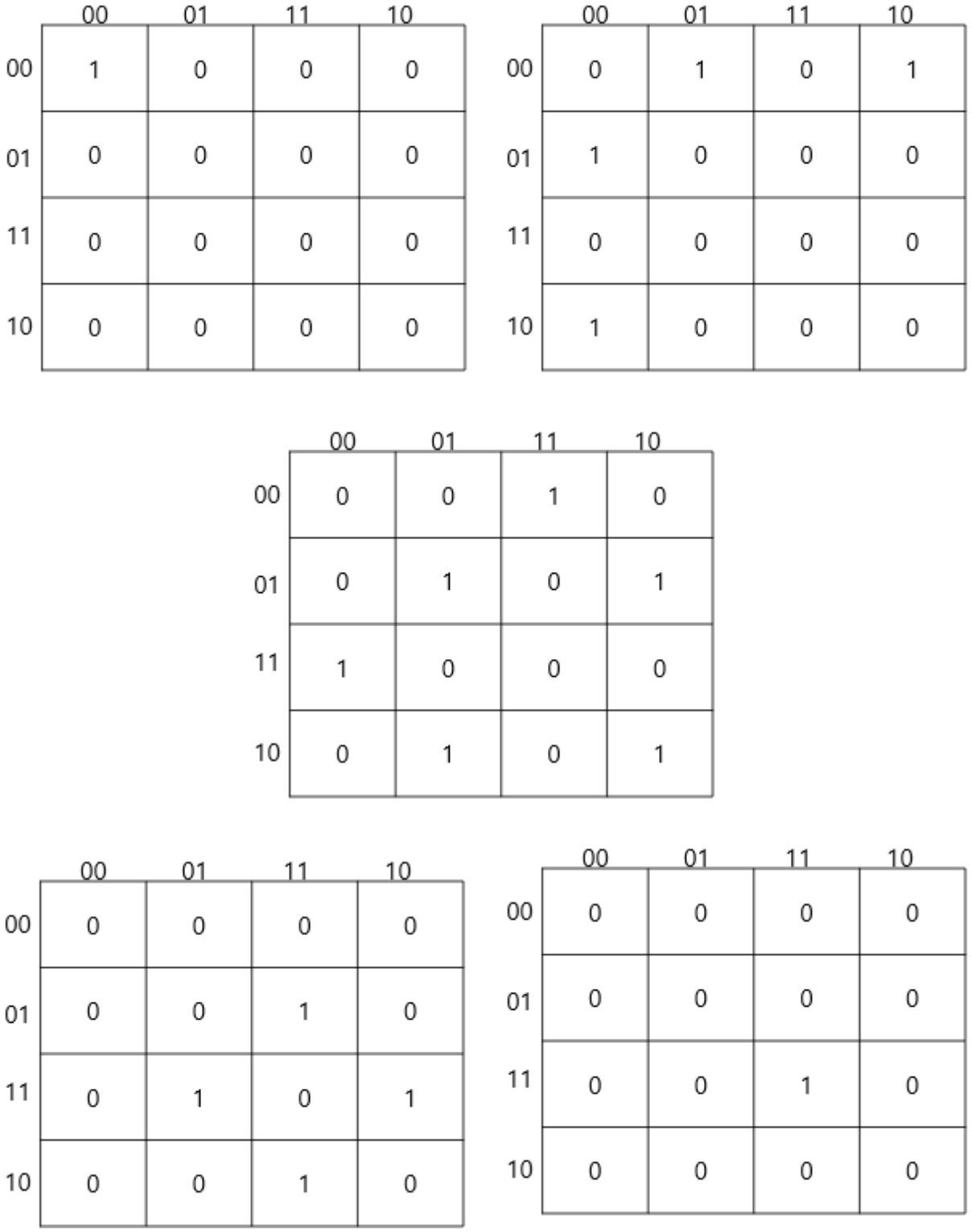


그림 11: 완전 대칭 함수 Exactly-0 ~ Exactly-4의 카르노맵 패턴 (11-1: 점, 11-2: 모서리, 11-3: 고리, 11-4: 모서리, 11-5: 점).

4.2 대각선 패턴

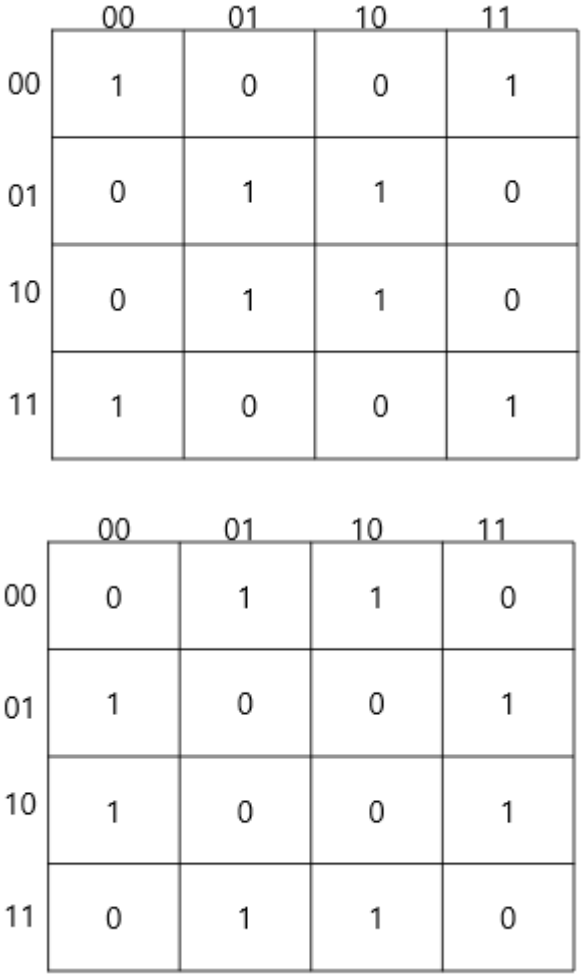
일부 함수는 카르노맵 상에서 대각선 형태의 시각 패턴을 형성한다.

이러한 패턴은 변수 간 특정 관계가 강조될 때 나타날 수 있으며, 완전대칭이 아닌 함수에서는 변수 재배열에 따라 방향이 변할 수 있다. 다만 아래 그림 12·13의 사례는 4변수 XOR/XNOR을 Gray 축 순서와 이진 축 순서(00, 01, 10, 11)로 각각 그린 것이므로, 모양의 차이는 변수 재배열이 아니라 축 라벨 순서에서 온 것이다.

특히 원래의 대각선 구조가 다른 배열에서는 블록 형태 또는 반복 구조로 보이는 경우도 존재한다.

이는 대각선 자체가 불변 요소라기보다는, 특정 구조가 현재 변수 배열에서 투영된 결과일 가능성을 보여준다.

따라서 변수 재배열은 대각선 패턴의 본질을 파악하기 위한 도구로 활용될 수 있다.



	00	01	10	11
00	1	0	0	1
01	0	1	1	0
10	0	1	1	0
11	1	0	0	1

	00	01	10	11
00	0	1	1	0
01	1	0	0	1
10	1	0	0	1
11	0	1	1	0

그림 12: 대각선 패턴 대표 사례. 대각선 방향으로 1이 배치된 카르노맵 — 오른쪽 아래 방향(↘) 또는 오른쪽 위 방향(↗)의 대각선 구조.

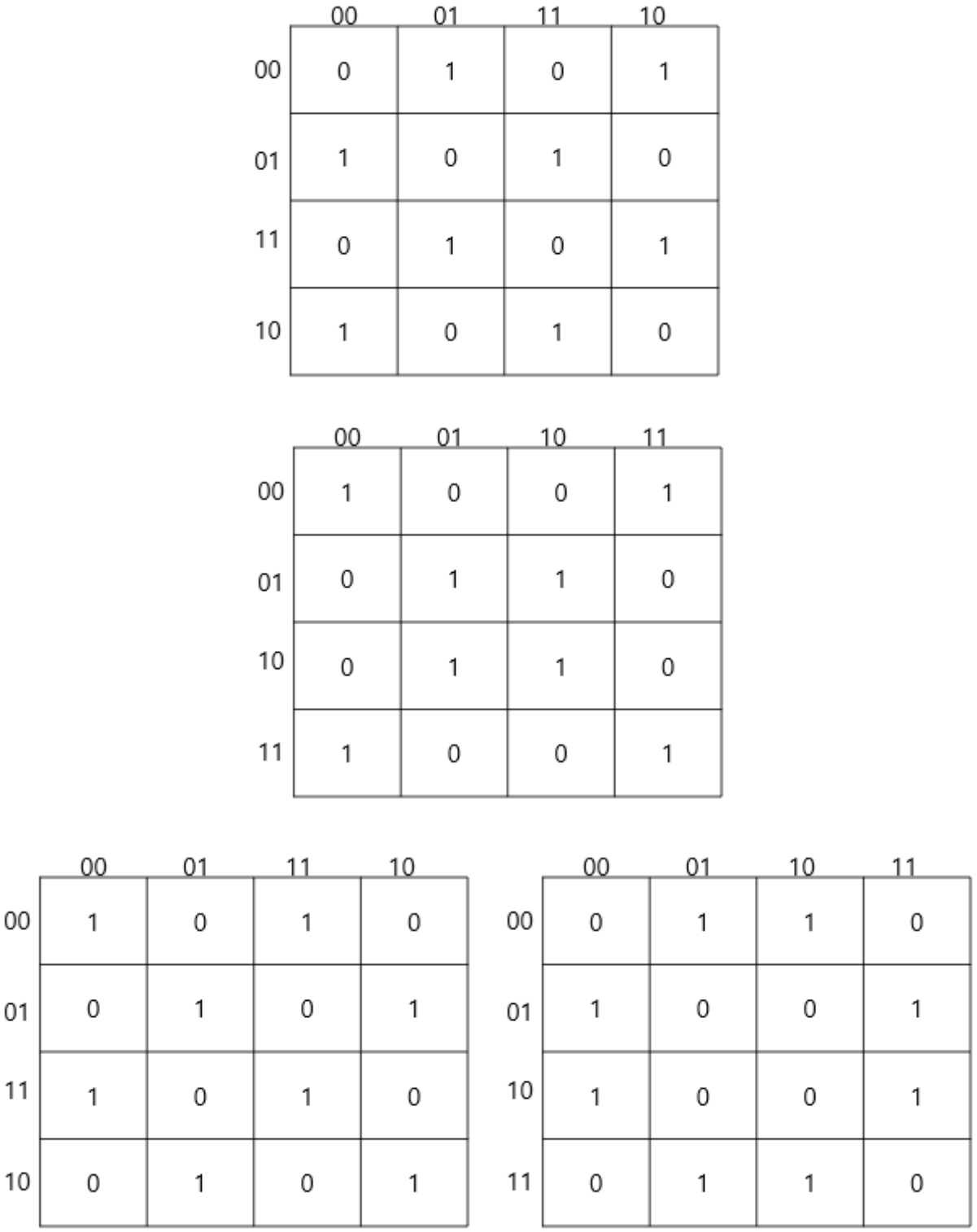


그림 13: Gray 축 순서와 이진 축 순서로 각각 그린 4변수 XOR/XNOR 패턴 (13-1: XOR Gray, 13-2: XNOR 이진, 13-3: XNOR Gray, 13-4: XOR 이진). 모양의 차이는 변수 재배열이 아니라 축 라벨 순서에서 온다.

4.3 모서리 패턴

모서리 패턴(corner pattern)은 Exactly-1(m1, m2, m4, m8)이나 Exactly-3(m7, m11, m13, m14)처럼 한 셀(m0 또는 m15)의 네 이웃 셀에 1이 배치되는 형태로 나타난다.

이러한 패턴은 완전대칭함수나 특정 Weight Layer 구조에서 자주 관찰된다.

Exactly-1과 Exactly-3은 완전 대칭 함수이므로 24개 변수 배열 모두에서 같은 위치에 같은 모양으로 나타난다.

그러나 패턴이 표현하는 논리적 구조 자체는 유지된다.

이는 위치와 구조를 구분하여 해석할 필요가 있음을 보여준다.

> **정정 (2026-10-08).** Exactly-1과 Exactly-3은 완전 대칭 함수이므로 변수 재배열로 그림이 이동하거나 변하지 않는다 (24개 배열 모두 같은 그림). 아래 그림 10의 "재배열 전후 비교"에서 모서리 위치가 이동한다는 서술은 성립하지 않는다. 또 두 함수는 "네 모서리"가 아니라 토러스 위에서 각각 m_0(Exactly-1: m_1, m_2, m_4, m_8)과 m_{15}(Exactly-3: $m_7, m_{11}, m_{13}, m_{14}$)의 네 이웃 셀이다. 카르노맵은 토러스이므로 "모서리"는 절대 위치가 아니라 이웃 관계로 해석해야 한다.

	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	1	0	0	0
11	0	0	0	0
10	1	0	0	0

그림 08: Exactly-1 함수의 모서리(corner) 패턴. m0의 네 이웃 셀(m1, m2, m4, m8)에만 1이 위치한 카르노맵, 나머지 12개 셀은 0.

	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	0	1
10	0	0	1	0

그림 10: Exactly-3 함수의 모서리 패턴 — 변수 재배열 전후 비교. 24개 변수 배열 모두에서 같은 그림이며, m15의 네 이웃 셀(m7, m11, m13, m14)에 1이 위치한다(1의 개수=4).

4.4 고리 패턴

고리 패턴(ring pattern)은 특정 Hamming Weight 층이 강조될 때 형성될 수 있다.

예를 들어 Exactly-2 함수는 카르노맵에서 고리 형태와 유사한 구조를 나타낼 수 있다.

Exactly-2는 완전 대칭 함수이므로 24개 변수 배열 모두에서 고리의 형태가 동일하며, 동일 Weight Layer(Hamming Weight=2)에서 유래한 구조가 그대로 유지된다. 고리의 형태가 달라 보이는 것은 축 라벨 순서가 Gray가 아닐 때이다.

이러한 현상은 시각 패턴이 단순한 그림이 아니라 함수 구조의 표현임을 시사한다.

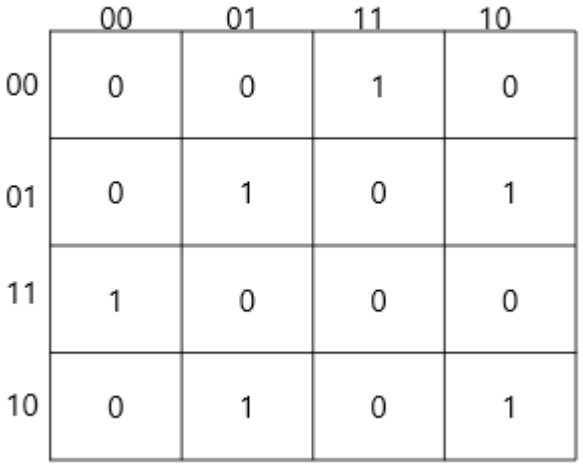


그림 09: Exactly-2 함수의 고리(ring) 패턴. Hamming Weight=2인 6개의 셀에 1이 배치된 4×4 카르노맵 — 고리 형태 강조 표시.

4.5 블록 패턴

블록 패턴(block pattern)은 카르노맵에서 인접한 셀들이 하나의 큰 영역을 형성하는 경우를 의미한다.

이러한 패턴은 특정 변수의 값이 고정될 때 자주 나타난다.

변수 재배열 이후 블록의 위치는 바뀔 수 있으나, 블록의 크기와 포함하는 논리적 관계는 유지되는 경우가 많다.

따라서 블록 패턴은 위치 변화와 구조 유지가 동시에 관찰되는 대표적 사례라 할 수 있다.

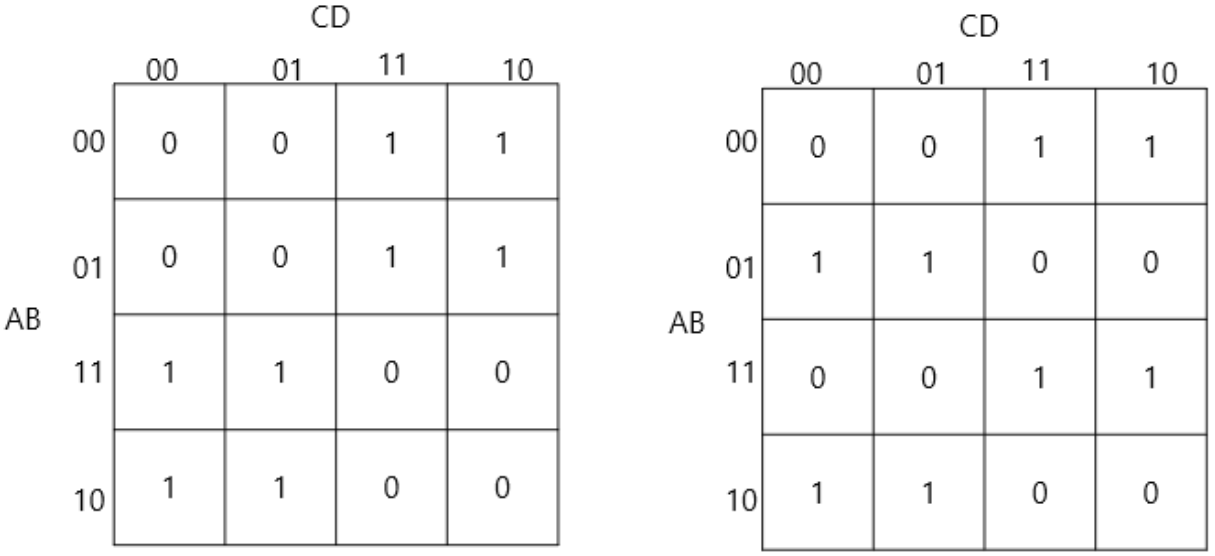


그림 14: 블록 패턴 대표 사례. 왼쪽은 A⊕C로 (A=0, C=1)과 (A=1, C=0)에 해당하는 2×2 블록 두 개가 나타나고, 오른쪽은 A⊕B⊕C이다(그림 03-1·18-1과 같은 그림이며 사각형 강조 표시는 없음).

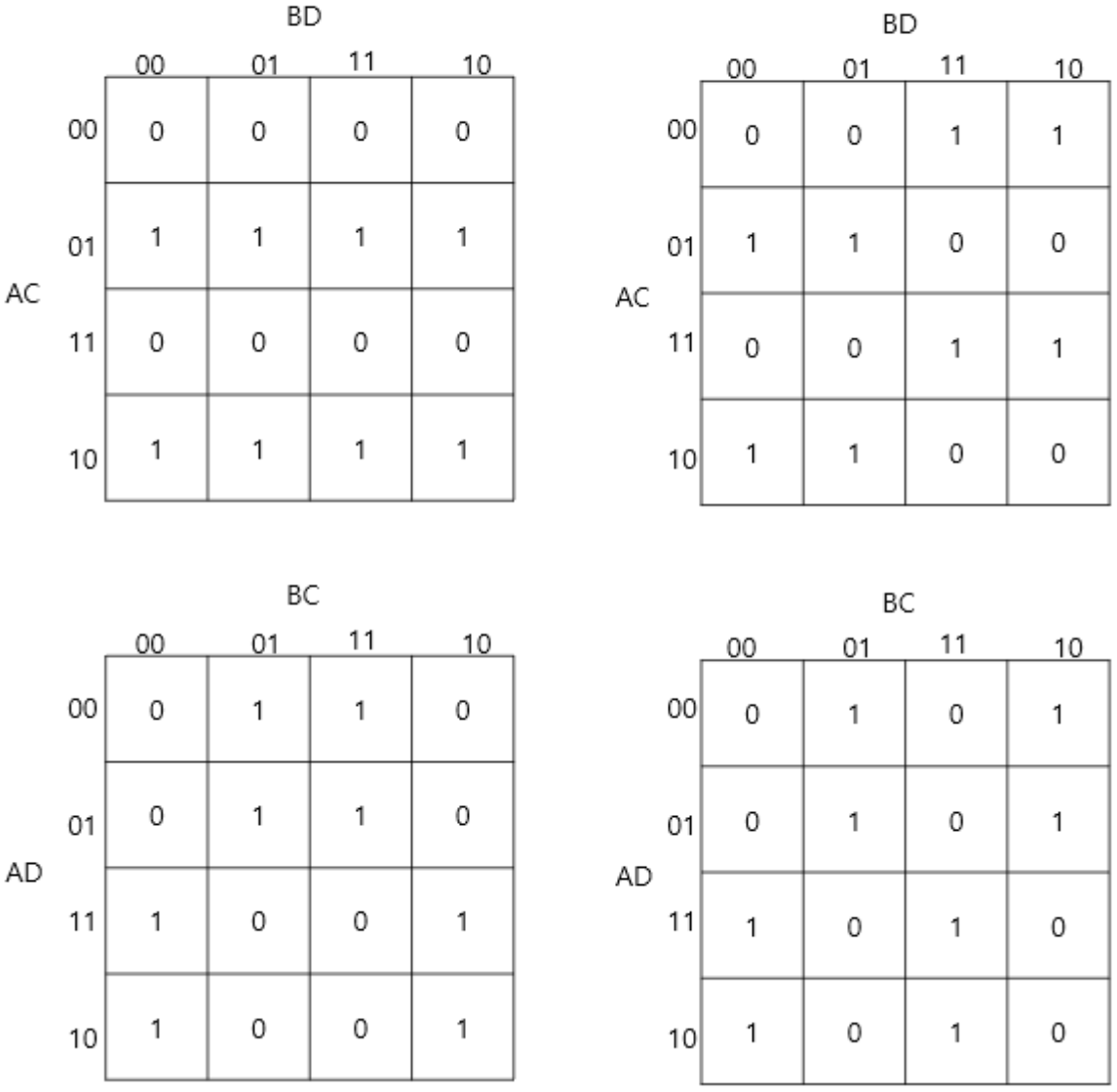


그림 15: 변수 재배열 후 블록 패턴 위치 변화. 동일 함수를 두 가지 배열로 표현 — 블록의 위치는 이동하지만 크기와 논리적 의미는 유지됨을 비교.

4.6 소결

패턴별 분석 결과, 변수 재배열이 카르노맵의 그림을 실제로 바꾸는 경우는 완전대칭이 아닌 함수(예: A⊕C, A⊕B⊕C의 블록 패턴)에 한정되었다. 완전대칭함수인 체커보드·모서리·고리 패턴은 24개 배열 모두에서 같은 그림이었고, 그림 12·13의 대각선 패턴에서 보이는 변화는 변수 재배열이 아니라 축 라벨 순서의 효과였다.

그러나 관찰된 변화는 주로 위치, 방향, 배치 방식에 집중되었으며, 일부 구조적 특성은 유지되는 경향을 보였다.

이 결과는 카르노맵의 시각 패턴이 단순한 셀 배열이 아니라 보다 근본적인 구조를 반영할 가능성을 시사한다.

다음 장에서는 이러한 관찰 결과를 바탕으로 구조적 불변성의 관점에서 변화 요소와 유지 요소를 분석한다.

---

5. 구조적 불변성 분석

5.1 변화하는 요소

변수 재배열은 동일한 논리함수를 서로 다른 형태의 카르노맵으로 표현하게 한다. 이 과정에서 다양한 시각적 요소가 변화할 수 있다.

가장 쉽게 관찰되는 변화는 패턴의 위치이다. 특정 배열에서 좌측 상단에 나타나던 구조가 다른 배열에서는 우측 하단 또는 중앙 부근으로 이동할 수 있다.

패턴의 방향 또한 변화할 수 있다. 예를 들어 특정 함수가 대각선 형태로 관찰되더라도 변수 재배열 이후에는 수평 또는 수직 방향의 구조로 나타날 수 있다.

대칭축 역시 변화 가능성이 존재한다. 동일한 구조가 다른 축을 기준으로 대칭성을 나타내거나 회전된 형태로 표현될 수 있다.

이러한 변화는 카르노맵의 표현 방식이 달라졌기 때문이며, 논리함수 자체의 변화로 해석해서는 안 된다.

따라서 위치, 방향, 배치 형태는 변수 재배열에 따라 달라질 수 있는 **가변 요소**로 볼 수 있다.

5.2 유지되는 요소

반면 일부 특성은 변수 재배열 이후에도 유지된다.

가장 명확한 불변 요소는 **함수 자체**이다. 변수의 배치 순서가 달라지더라도 원래의 논리함수는 변하지 않는다.

또한 **1이 포함된 셀의 개수** 역시 유지된다. 변수 재배열은 셀의 위치를 바꾸지만 함수가 가지는 진리값의 분포 자체를 변경하지는 않는다.

패턴의 생성 원인 또한 유지된다. 예를 들어 XOR 함수에서 나타나는 체커보드 구조는 변수 재배열 이후에도 XOR 관계에서 비롯된 특성을 계속 유지한다.

완전대칭함수의 경우에도 특정 Hamming Weight 층에서 발생하는 구조는 변수 재배열 이후에도 동일한 논리적 의미를 가진다.

이는 시각적 표현이 달라지더라도 함수 내부의 생성 원리는 유지될 수 있음을 의미한다.

5.3 구조적 불변성의 분류

본 연구에서는 관찰된 불변 요소를 다음과 같이 분류할 수 있다고 제안한다.

논리적 불변성

논리식의 의미와 함수 자체가 유지되는 특성이다.

예시: XOR 함수, XNOR 함수, Exactly-k 함수

변수 재배열은 표현 방식을 바꿀 뿐 함수의 의미를 변경하지 않는다.

수량적 불변성

함수가 포함하는 1의 개수와 같은 정량적 특성이 유지되는 경우이다.

예시: 최소항 개수, Weight Layer의 크기

관계적 불변성

셀 간의 관계나 패턴 생성 원리가 유지되는 경우이다.

예시: XOR 기반 반복 구조, 대칭 관계, Weight Layer 구조

관계적 불변성은 단순한 위치 정보보다 더 근본적인 구조를 반영할 가능성이 있다.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	0	0
10	1	1	0	0

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

AC \ BD	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	1	1	1	1
11	0	0	0	0
10	1	1	1	1

AC \ BD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	1	1	0	0
11	0	0	1	1
10	1	1	0	0

AD \ BC	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	1	0	0	1
10	1	0	0	1

AD \ BC	00	01	11	10
00	0	1	0	1
01	0	1	0	1
11	1	0	1	0
10	1	0	1	0

그림 18: 2변수 XOR $A \oplus C$(왼쪽 그림)와 3변수 XOR $A \oplus B \oplus C$(오른쪽 그림)를 3가지 대표 배열(AB/CD, AC/BD, AD/BC)로 나란히 표현한 비교. 그림 모양은 배열마다 다르지만 1의 개수(각 8개)와 XOR 관계는 동일하다.

동치류 i	동치류 ii	동치류 iii
AB/CD	AC/BD	AD/BC
BA/CD	CA/BD	DA/BC
AB/DC	AC/DB	AD/CB
BA/DC	CA/DB	DA/CB
CD/AB	BD/AC	BC/AD
DC/AB	DB/AC	CB/AD
CD/BA	BD/CA	BC/DA
DC/BA	DB/CA	CB/DA

그림 16: 24개 변수 배열에서 3가지 대표 배열로의 분류 결과. 24개 배열을 대표 배열 A(AB/CD), B(AC/BD), C(AD/BC)의 3그룹으로 분류하는 다이어그램.

동치류 i	동치류 ii	동치류 iii
AB/CD	AC/BD	AD/BC
BA/CD	CA/BD	DA/BC
AB/DC	AC/DB	AD/CB
BA/DC	CA/DB	DA/CB
CD/AB	BD/AC	BC/AD
DC/AB	DB/AC	CB/AD
CD/BA	BD/CA	BC/DA
DC/BA	DB/CA	CB/DA

그림 17: 24개 변수 배열의 대표 배열 분류 전체 목록. 24가지 순열 각각이 어느 대표 배열 그룹에 속하는지 표로 정리.

패턴 핵심 구조의 불변성

본 연구에서 가장 중요하게 다루는 개념이다.

구조적 불변성이란 변수 재배열 이후에도 패턴의 핵심 구조가 유지되는 현상을 의미한다.

예를 들어 체커보드 패턴(4변수 XOR의 그림)은 변수 배치를 바꿔도 24가지 배치 모두에서 같은 그림이다. 모양이 달라지는 것은 축 라벨 순서를 Gray 순서에서 이진 순서로 바꿀 때이며, 이는 변수 재배열이 아니라 라벨 순서의 차이이다.

고리 패턴 가운데 완전 대칭 함수(Exactly-k 등)의 그림도 모든 배치에서 같다. **Weight Layer에 기반한 구조**가 배치와 무관하게 유지되기 때문이다.

배치에 따라 그림이 달라질 수 있는 것은 비대칭 함수이며, 이때에도 1인 칸의 개수와 칸 사이의 인접 관계는 유지된다.

5.4 구조적 불변성 해석

구조적 불변성은 카르노맵을 단순한 배열이 아니라 구조 표현 도구로 이해할 수 있게 한다.

만약 변수 재배열에 따라 모든 패턴이 완전히 무작위적으로 변한다면 시각 패턴 연구의 의미는 제한적일 것이다.

그러나 실제로는 일부 구조가 반복적으로 유지되는 현상이 관찰된다.

이는 카르노맵의 시각 패턴이 단순한 그림이 아니라 논리함수의 구조를 반영하고 있을 가능성을 시사한다.

또한 변수 재배열은 이러한 구조를 다양한 관점에서 관찰할 수 있게 해주는 일종의 **탐색 도구**로 해석할 수 있다.

5.5 소결

분석 결과 변수 재배열은 위치, 방향, 배치와 같은 시각적 요소를 변화시키지만, 함수의 논리적 의미와 일부 구조적 특성은 유지되는 경향을 보였다.

본 연구는 이러한 현상을 구조적 불변성으로 해석하였다.

구조적 불변성은 카르노맵 패턴을 이해하기 위한 새로운 관점을 제공하며, 변수 재배열을 단순한 표현 변화가 아닌 구조 분석 도구로 활용할 수 있는 가능성을 제시한다.

---

6. 해석 프레임워크 제안

6.1 패턴 중심 해석

전통적인 카르노맵 활용은 논리식 최소화에 초점을 둔다. 그러나 시각 패턴 연구의 관점에서는 카르노맵을 하나의 구조 표현 도구로 볼 수 있다.

패턴 중심 해석(pattern-oriented interpretation)은 카르노맵에 나타나는 시각적 형태를 분석의 출발점으로 사용하는 방법이다.

예를 들어 다음과 같은 패턴은 각각 서로 다른 구조적 특성을 나타낼 수 있다.

패턴	관련 구조
체커보드	XOR/XNOR 관계
모서리	특정 Weight Layer
고리	대칭 함수
블록	변수 고정 구조
대각선	변수 간 관계

이 접근법에서는 논리식을 먼저 분석하는 대신, 시각적으로 관찰되는 패턴을 통해 함수의 특성을 추론한다.

패턴 중심 해석은 카르노맵을 보다 직관적으로 이해할 수 있게 하며, 시각적 특징을 연구 대상으로 확장하는 기반을 제공한다.

6.2 구조 중심 해석

패턴 중심 해석이 눈에 보이는 형태에 주목한다면, 구조 중심 해석(structure-oriented interpretation)은 패턴의 내부 관계에 주목한다.

본 연구 결과에 따르면 변수 재배열은 패턴의 위치와 방향을 변화시킬 수 있다.

그러나 일부 관계는 유지된다.

- XOR 기반 반복 구조
- 대칭 관계
- Weight Layer 기반 구조
- 연결 관계

이러한 특성은 패턴의 외형보다 더 근본적인 수준의 정보를 제공한다.

따라서 구조 중심 해석에서는 다음과 같은 질문이 중요해진다.

- 이 패턴은 왜 생성되었는가?
- 어떤 논리적 관계가 이 구조를 만들었는가?
- 변수 재배열 이후에도 무엇이 유지되는가?

이 접근법은 시각적 형태를 넘어 함수의 구조적 특성을 탐구하는 데 적합하다.

6.3 변수 재배열 기반 해석

본 연구는 변수 재배열 자체를 하나의 분석 방법으로 활용할 수 있다고 제안한다.

기존의 카르노맵 해석은 일반적으로 하나의 변수 배열만을 사용한다.

그러나 특정 배열에서 잘 보이지 않는 구조가 다른 배열에서는 명확하게 드러날 수 있다.

예를 들어 대각선 형태로 보이던 패턴이 다른 배열에서는 반복 구조로 나타날 수 있으며, 복잡해 보이던 패턴이 단순한 블록 구조로 변환될 수도 있다.

따라서 변수 재배열은 단순한 표현 변경이 아니라 **숨겨진 구조를 탐색하기 위한 도구**로 활용될 수 있다.

6.4 제안 프레임워크

본 연구는 카르노맵 해석을 위해 다음과 같은 절차를 제안한다.

1단계: 패턴 관찰

카르노맵에서 나타나는 주요 시각 패턴을 식별한다.

2단계: 변수 재배열

동일한 함수에 대해 다양한 변수 배열을 적용한다.

3단계: 패턴 비교

패턴이 어떻게 변화하는지 관찰한다.

4단계: 불변 요소 추출

변화 과정에서도 유지되는 특성을 찾는다.

5단계: 구조 해석

불변 요소를 바탕으로 함수의 구조적 특성을 해석한다.

이 과정은 단일 카르노맵 관찰보다 더 풍부한 구조 정보를 제공할 수 있다.

6.5 연구 의의

본 연구에서 제안한 프레임워크는 카르노맵을 단순한 논리식 최소화 도구에서 구조 분석 도구로 확장한다는 점에서 의미가 있다.

또한 변수 재배열을 활용하여 숨겨진 구조를 발견할 수 있다는 가능성을 제시함으로써, 카르노맵 연구의 새로운 방향을 제공한다.

이 프레임워크는 향후 대칭성 연구, 구조 불변성 연구, 그리고 보다 일반적인 시각적 구조 분석 연구로 확장될 수 있다.

---

7. 결론

7.1 연구 요약

본 연구는 카르노맵에서 변수 재배열이 시각 패턴에 미치는 영향을 분석하고, 그 과정에서 유지되는 구조적 특성을 탐색하는 것을 목적으로 수행되었다.

전통적인 카르노맵 연구는 주로 논리식 최소화에 초점을 맞추어 왔으나, 본 연구는 카르노맵을 시각적 구조 표현 도구로 해석하고자 하였다.

이를 위해 다양한 변수 배열을 적용하여 동일한 논리함수가 카르노맵 상에서 어떻게 표현되는지 관찰하였다. 분석 결과, 변수 재배열은 패턴의 위치, 방향, 배치 형태와 같은 시각적 요소를 변화시킬 수 있음을 확인하였다.

반면 함수 자체의 논리적 의미, 패턴 생성 원리, 반복 구조, 일부 대칭 관계와 같은 특성은 유지되는 경향을 보였다.

본 연구는 이러한 현상을 **구조적 불변성(structural invariance)**의 관점에서 해석하였다.

7.2 연구 기여

본 연구의 주요 기여는 다음과 같다.

첫째, 카르노맵을 논리식 최소화 도구를 넘어 시각적 구조 분석 대상으로 확장하였다.

둘째, 변수 재배열에 따른 패턴 변화 현상을 체계적으로 관찰하고 정리하였다.

셋째, 변화하는 요소와 유지되는 요소를 구분함으로써 구조적 불변성이라는 분석 관점을 제안하였다.

넷째, 변수 재배열을 숨겨진 구조를 탐색하기 위한 분석 도구로 활용할 수 있는 가능성을 제시하였다.

또한 본 연구는 카르노맵 시각 패턴 연구와 대칭 함수 시각 패턴 연구를 연결하는 중간 단계의 연구로서 의미를 가진다.

7.3 연구의 한계

본 연구는 주로 4변수 카르노맵을 대상으로 수행되었다.

또한 모든 불 함수를 분석하기보다는 특징적인 시각 패턴을 생성하는 함수들을 중심으로 관찰을 진행하였다.

따라서 본 연구에서 제안한 구조적 불변성이 모든 함수에 동일하게 적용되는지에 대해서는 추가적인 검증이 필요하다.

또한 일부 해석은 관찰에 기반한 가설적 성격을 포함하고 있으며, 수학적 증명이나 형식적 모델링은 향후 연구 과제로 남아 있다.

7.4 향후 연구

향후 연구에서는 보다 체계적인 구조 분류와 수학적 분석이 필요하다.

특히 다음과 같은 방향을 고려할 수 있다.

- 변수 순열과 구조 변환의 수학적 모델링
- 대칭군(Symmetric Group)을 이용한 분석
- 회전 및 반사 변환에 대한 불변성 연구
- 변수 배열 동치류(그림 02·16·17의 3개 동치류)의 형식적 증명과 일반화
- 구조적 불변성의 형식적 정의

또한 카르노맵의 시각 패턴이 인간에게 어떻게 인식되는지에 대한 연구와 연결할 수 있으며, 생성형 AI를 활용한 패턴 발견 및 구조 분석 연구로도 확장 가능할 것으로 기대된다.

7.5 맺음말

카르노맵은 단순히 논리식을 간소화하기 위한 도구가 아니라, 불 함수의 구조를 시각적으로 표현하는 매체로도 해석될 수 있다.

본 연구는 변수 재배열이라는 관점을 통해 시각적 변화 속에서도 유지되는 구조가 존재할 가능성을 제시하였다.

이는 카르노맵 연구를 논리식 최소화 중심의 접근에서 구조와 불변성 중심의 접근으로 확장하기 위한 하나의 시도로 볼 수 있으며, 향후 보다 심층적인 구조 연구의 출발점이 될 수 있을 것으로 기대된다.

참고문헌

[1] Karnaugh, M. (1953). "The map method for synthesis of combinational logic circuits." **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics**, 72(5), 593–599.

[2] Veitch, E. W. (1952). "A chart method for simplifying truth functions." **Proceedings of the 1952 ACM National Meeting** (Pittsburgh), 127–133.

[3] McCluskey, E. J., Jr. (1956). "Minimization of Boolean functions." **Bell System Technical Journal**, 35(5), 1417–1444.

[4] Quine, W. V. (1952). "The problem of simplifying truth functions." **The American Mathematical Monthly**, 59(8), 521–531.

[5] Quine, W. V. (1955). "A way to simplify truth functions." **The American Mathematical Monthly**, 62(9), 627–631.

[6] Gray, F. (1953). "Pulse code communication." U.S. Patent 2,632,058.

[7] Mano, M. M., & Ciletti, M. D. **Digital Design: With an Introduction to the Verilog HDL, VHDL, and SystemVerilog** (6th ed.). Pearson Education.

[8] Roth, C. H., Jr., & Kinney, L. L. **Fundamentals of Logic Design** (7th ed.). Cengage Learning.

[9] Shannon, C. E. (1938). "A symbolic analysis of relay and switching circuits." **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, 57(12), 713–723.

[10] Davio, M., Deschamps, J.-P., & Thayse, A. (1978). **Discrete and Switching Functions**. McGraw-Hill.

[11] Dummit, D. S., & Foote, R. M. **Abstract Algebra** (3rd ed.). Wiley.

[12] Weyl, H. (1952). **Symmetry**. Princeton University Press.

본문에는 번호 인용이 없고 [1]–[9]는 배경 문헌이며, [10]–[12]는 본 논문 본문에서 직접 인용되지 않았으며, 7.4절에서 제시한 향후 연구(대칭군 기반 분석, 불변성의 형식적 정의 등)를 위한 배경 문헌이다.